Méth. Mat. Phys. - Chapitre 6

Séries de Fourier

EPFL

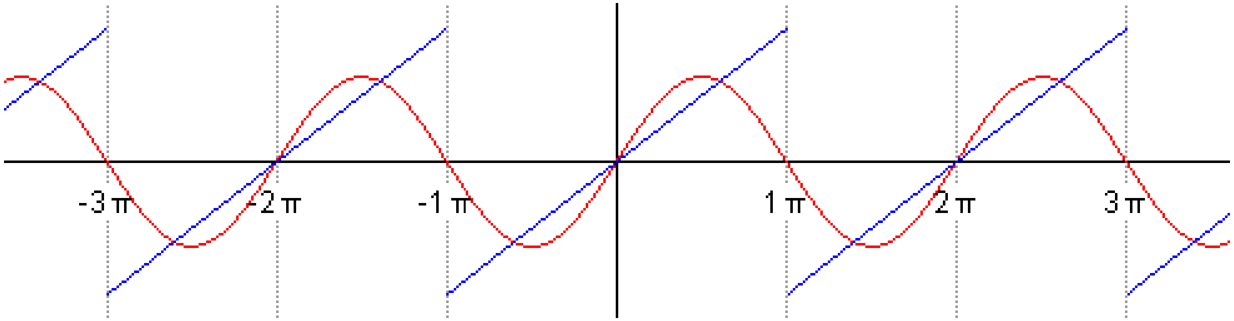
- **Séries de Fourier :** représentation d'une fonction continue par morceaux comme combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales orthogonales.

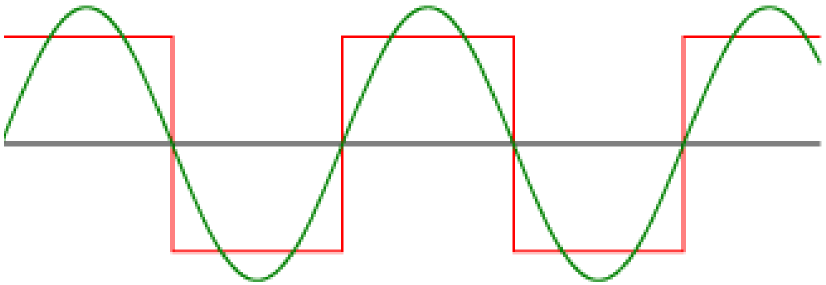
1. **Fonction en dents de scie :** $x \in [-\pi, \pi]$ (1 période) exercice

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \tag{6.1}$$

2. **Fonction en escalier :** $x \in [-\pi, \pi]$ (1 période) exercice

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant \pi \end{cases} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \tag{6.2}$$





- **Fonction réelle :** parties symétrique (paire) et antisymétrique (impaire)

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(x) - f(-x)\Big) \tag{6.3}$$

- **Série de Fourier réelle :** symétrique (cosinus) et antisymétrique (sinus)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{6.4}$$

- **Série de Fourier réelle :** $a_{-n} = a_n$ et $b_{-n} = -b_n$ (6.6)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big) \tag{6.7}$$

où $\cos(nx) = \cos(-nx)$ et $\sin(nx) = -\sin(-nx)$ (6.5)

- **Coefficients de Fourier réels :** démonstration en exercice

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad \text{et} \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \tag{6.28}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \tag{6.30}$$

- **Discontinuité :** fonction en x_0

$$f\,(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \Big(f\,(x_0 + \varepsilon) + f\,(x_0 - \varepsilon) \Big) \tag{6.8}$$

- **Conditions de Dirichlet :** fonction continue par morceaux

  1. Nombre fini de discontinuités finies sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$
  2. Nombre fini de maxima et de minima sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$
  3. Intégrale de $|f(x)|$ qui converge sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$

- **Relations d'orthonormalité réelle :** $m, n \in \mathbb{N}^*$ (exercice)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \sin nx \, dx = 0 \tag{6.13}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \cos nx \, dx = \delta_{mn} \tag{6.18}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \sin nx \, dx = \delta_{mn} \tag{6.23}$$

- **Série de Fourier réelle :**

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{e^{\,inx}+e^{-\,inx}}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{e^{\,inx}-e^{-\,inx}}{2i}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n-i\,b_n\right)e^{\,inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+i\,b_n\right)e^{-\,inx}\qquad(6.31)$$

- **Coefficient de Fourier complexe :** $a_n=a_{-\,n}$ et $b_n=-\,b_{-\,n}$

$$c_n=\frac{1}{2}\left(a_n-i\,b_n\right)\quad\text{et}\quad c_{-\,n}=\frac{1}{2}\left(a_n+i\,b_n\right)\quad\text{et}\quad b_0=0\qquad(6.32)$$

- **Série de Fourier complexe :** où $c_{-\,n}=c_n^{*}$ et $c_0=\frac{a_0}{2}$ (6.33)

$$f\left(x\right)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{\,inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-\,n}\,e^{-\,inx}=\sum_{n=-\,\infty}^{\infty}c_n\,e^{\,inx}\qquad(6.34)$$

- **Coefficient de Fourier complexe :** (exercice)

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\,\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-\,inx}\,dx\qquad(6.38)$$

- **Relation d'orthonormalité complexe :**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx}\, e^{inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m-n)x}\, dx = \delta_{mn} \tag{6.35}$$

- **Théorème de Parseval :**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\, f\,(x)\,|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, c_n\,|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{6.39}$$

- **Démonstration :**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\, f\,(x)\,|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*\,(x)\, f\,(x)\, dx \tag{6.40}$$

$$= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_m^*\, e^{-imx}\, c_n\, e^{inx}\, dx = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_m^*\, c_n\, \delta_{mn}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, c_n\,|^2 = |\, c_0\,|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |\, c_n\,|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \qquad \square$$

- **Séries de Fourier réelle :** fonction paire : $f(x) = f(-x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{6.41}$$

- **Coefficient de Fourier réel :** fonction paire

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad \text{et} \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx \tag{6.42}$$

- **Séries de Fourier réelle :** fonction impaire : $f(x) = -f(-x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{6.43}$$

- **Coefficient de Fourier réel :** fonction impaire

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \tag{6.44}$$

- **Périodicité :**
  1. $x \in [\,-\pi, \pi\,]$
  2. $x' \in [\,-L, L\,]$
- **Changement de variable :**

$$x = \frac{\pi x'}{L} \qquad \text{ainsi} \qquad dx = \frac{\pi}{L}\,dx' \tag{6.45}$$

- **Série de Fourier réelle :** (6.4)

$$f\left(x'\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \tag{6.46}$$

- **Coefficients de Fourier réels :** (6.26), (6.28) et (6.30)

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\left(x'\right)\cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)dx' \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\left(x'\right)dx'$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\left(x'\right)\sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)dx' \tag{6.47}$$

- **Série de Fourier complexe :**

$$f\left(x'\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\,\frac{n\pi x'}{L}\right) \tag{6.48}$$

- **Coefficient de Fourier complexe :**

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f\left(x'\right)\exp\left(-\,i\,\frac{n\pi x'}{L}\right)dx' \tag{6.49}$$

- **Séries de Fourier réelle :** fonction paire : $f\left(x'\right) = f\left(-x'\right)$

$$f\left(x'\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \tag{6.50}$$

- **Séries de Fourier réelle :** fonction impaire : $f\left(x'\right) = -\,f\left(-x'\right)$

$$f\left(x'\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \tag{6.51}$$

- **Coordonnée verticale :** corde vibrante

$$y(x,t) \quad \text{où} \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad t \in [0, \infty) \tag{6.52}$$

- **Conditions aux bords :**

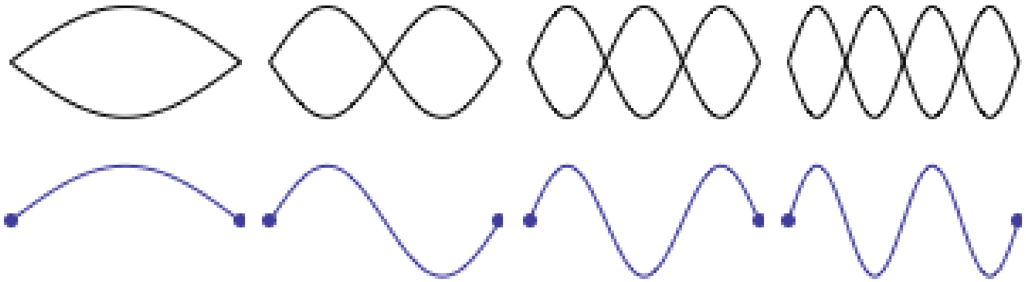
$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \tag{6.53}$$

- **Coordonnée verticale :** série de Fourier réelle impaire

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.54}$$

- **Onde acoustique :** corde vibrante

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{6.55}$$



- **Onde acoustique :** (6.54) dans (6.55)

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,b_n\left(t\right)+\frac{1}{c_s^2}\,\ddot{b}_n\left(t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=0 \tag{6.56}$$

- **Oscillateur harmonique :** mode n

$$\ddot{b}_n\left(t\right)+\omega_n^2\,b_n\left(t\right)=0 \tag{6.57}$$

- **Pulsation :** mode n

$$\omega_n=\frac{n\pi c_s}{L} \tag{6.58}$$

- **Amplitude :** mode n : A_n et B_n déterminés par les conditions initiales

$$b_n\left(t\right)=A_n\cos\left(\omega_n\,t\right)+B_n\sin\left(\omega_n\,t\right) \tag{6.59}$$

- **Coordonnée verticale :** série de Fourier réelle

$$y\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos\left(\omega_n\,t\right)+B_n\sin\left(\omega_n\,t\right)\Big)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.60}$$

- **Coordonnée verticale initiale:** (6.60) en $t = 0$

$$y\left(x,0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.61}$$

- **Relation d'orthonormalité :** $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn} \tag{6.62}$$

- **Relation d'orthonormalité :** parité

$$\frac{1}{2L}\int_{0}^{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn} \tag{6.63}$$

- **Coefficients de Fourier pairs :** intégrant pair (6.61) et (6.63)

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \, \delta_{mn} = \frac{1}{2L}\int_{0}^{L} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \, \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} y\left(x,0\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned} \tag{6.64}$$

- **Vitesse verticale :** dérivée temporelle de la coordonnée verticale (6.60)

$$v_y\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \Big(B_n \cos\left(\omega_n\, t\right) - \, A_n \sin\left(\omega_n\, t\right)\Big) \, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.65}$$

- **Vitesse verticale initiale:** (6.65) en $t = 0$

$$v_y\left(x,0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \, B_n \, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.66}$$

- **Relation d'orthonormalité :** parité

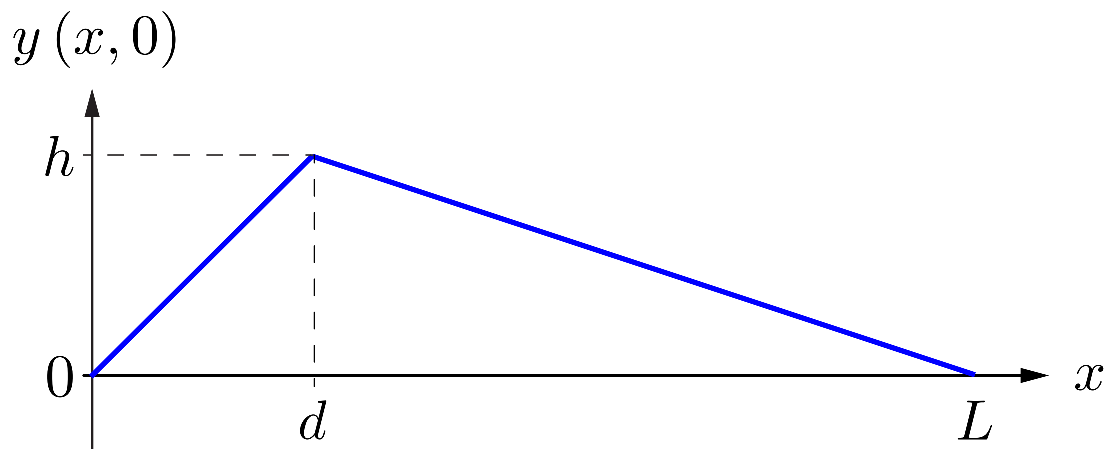
$$\frac{1}{2L}\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \delta_{mn} \tag{6.63}$$

- **Coefficients de Fourier impairs :** intégrant pair et relation (6.63)

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m\, \delta_{mn} = \frac{1}{2L\,\omega_n}\int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m \, B_m \, \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{2}{L\,\omega_n}\int_0^L v_y\left(x,0\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \end{aligned} \tag{6.67}$$

- **Coordonnée verticale initiale :** corde pincée en $x = d$ ainsi $y\left(d,0\right) = h$

$$y\left(x,0\right) = \begin{cases} \dfrac{x}{d}\,h & \text{si} \qquad 0 \leqslant x \leqslant d \\[2ex] \dfrac{L-x}{L-d}\,h & \text{si} \qquad d \leqslant x \leqslant L \end{cases} \tag{6.69}$$



- **Vitesse verticale initiale :** nulle : corde au repos

$$v_y\left(x,0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n\, B_n\, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \qquad \text{ainsi} \qquad B_n = 0 \tag{6.70}$$

- **Coordonnée verticale :** série de Fourier réelle paire (6.70) dans (6.60)

$$y\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\omega_n\, t\right) \tag{6.71}$$

- **Changement de variable :**

$$z = \frac{n\pi x}{L} \qquad \text{ainsi} \qquad dz = \frac{n\pi}{L}\,dx \tag{6.73}$$

- **Coefficients de Fourier pairs :** (6.69) dans (6.64)

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L}\int_0^d \frac{x}{d}\,h\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \frac{2}{L}\int_d^L \frac{L-x}{L-d}\,h\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{2\,h\,L}{n^2\pi^2 d}\int_0^{\frac{n\pi d}{L}} z\,\sin z\,dz + \frac{2\,h\,L}{n\pi\,(L-d)}\int_{\frac{n\pi d}{L}}^{\frac{n\pi L}{L}} \sin z\,dz \\ &\quad - \frac{2\,h\,L}{n^2\pi^2\,(L-d)}\int_{\frac{n\pi d}{L}}^{\frac{n\pi L}{L}} z\,\sin z\,dz \end{aligned} \tag{6.74}$$

- **Intégration par parties :**

$$\begin{aligned} \int_a^b z\,\sin z\,dz &= -\,z\,\cos z\,\Big|_a^b + \int_a^b \cos z\,dz = -\,z\,\cos z\,\Big|_a^b + \sin z\,\Big|_a^b \\ &= a\cos a - \sin a + \sin b - b\cos b \end{aligned} \tag{6.75}$$

- **Coefficients de Fourier pairs :** (6.75) dans (6.74)

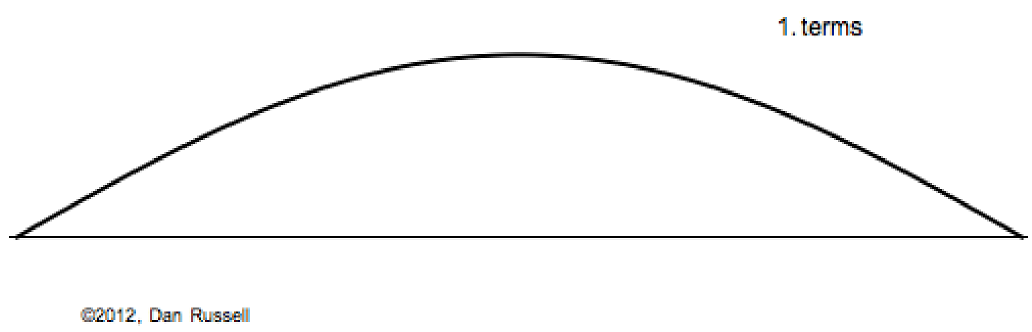
$$
\begin{aligned}
A_n = {} & \frac{2\,h\,L}{n^2\pi^2 d}\left(\sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) - \frac{n\pi d}{L}\cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right)\right) \\
& - \frac{2\,h\,L}{n\pi\,(L-d)}\left(\cos\left(\frac{n\pi L}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right)\right) \\
& + \frac{2\,h\,L}{n^2\pi^2\,(L-d)}\left(\sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) - \frac{n\pi d}{L}\cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right)\right) \\
& - \frac{2\,h\,L}{n^2\pi^2\,(L-d)}\left(\sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right) - \frac{n\pi L}{L}\cos\left(\frac{n\pi L}{L}\right)\right) \\
= {} & \frac{2\,h\,L}{n^2\pi^2 d}\sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) + \frac{2\,h\,L}{n^2\pi^2\,(L-d)}\left(\sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right)\right) \\
& - \frac{2\,h}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right) + \frac{2\,h\,L}{n\pi\,(L-d)}\cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \\
& - \frac{2\,h\,d}{n\pi\,(L-d)}\cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right)
\end{aligned} \tag{6.77}
$$

- **Coefficients de Fourier pairs :** (6.77) remis en forme

$$A_n = \frac{2\,h}{n^2\pi^2}\,\frac{L^2}{L\,(L-\,d)}\,\sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \tag{6.78}$$

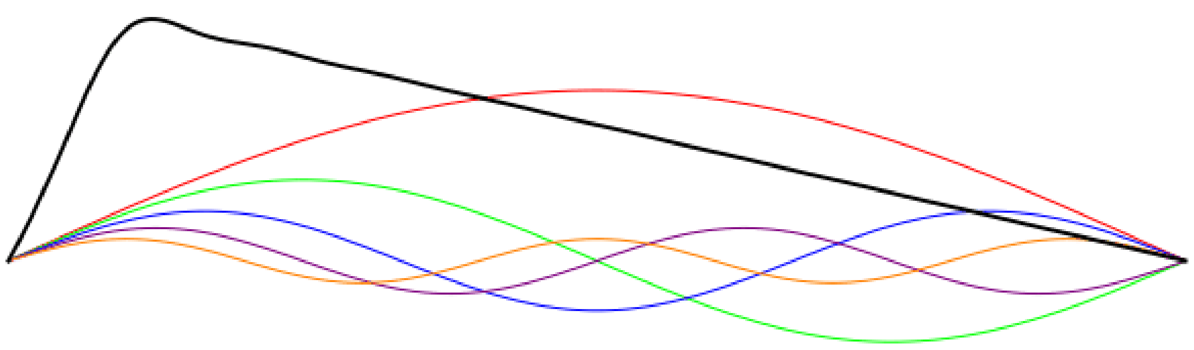
- **Coordonnée verticale initiale :** (6.78) dans (6.61)

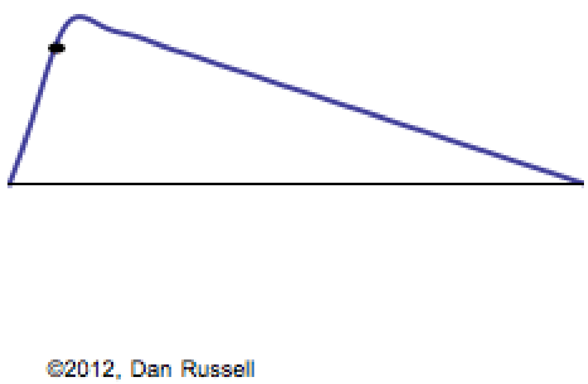
$$y\,(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,h}{n^2\pi^2}\,\frac{L^2}{L\,(L-\,d)}\,\sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.79}$$



- **Coordonnée verticale :** évolution temporelle (6.78) dans (6.71)

$$y\,(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,h}{n^2\pi^2}\,\frac{L^2}{L\,(L-\,d)}\,\sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\omega_n\,t\right) \qquad (6.80)$$




©2012, Dan Russell